Mathématiques pour préaprentissages

Algèbre de base

Créé dans le cadre du développement des ressources des Compétences pour Réussir.

Financement offert par le gouvernement du Canada dans le cadre de la Subvention canadienne pour l'emploi. Prestation des programmes assurée par le gouvernement de l'Ontario.

ALGÈBRE

Avant de commencer, voici quelques définitions et propriétés propres au domaine de l'algèbre.

- **Le coefficient <u>numérique</u> et le coefficient <u>littéral</u>**

  Une expression algébrique est composée de coefficients numériques (les nombres) et de coefficients littéraux (les lettres ou les variables).

Exemples :	3xy	3 est le coefficient numérique et **xy** est le coefficient littéral.
	2ab + 3c	2 et 3 sont les coefficients numériques, alors que **ab** et **c** sont les coefficients littéraux.
	4y	4 est le coefficient numérique et **y** est le coefficient littéral.

- **Un terme**

  Un terme est soit un **nombre**, une **variable** ou la **combinaison** d'un nombre et d'une variable reliés par la multiplication.

*****NB** Un terme est toujours séparé d'un autre terme par le signe d'**addition** ou de **soustraction**.

4y	expression algébrique à un terme.
5 + 3x	expression algébrique à deux termes qui sont séparés par le signe d'addition.
7y – 8x	expression algébrique à deux termes qui sont séparés par le signe de soustraction.
3ab – 4ac + 8b	expression algébrique à trois termes qui sont séparés par les signes de soustraction et d'addition.

Propriétés des exposants

a) 5^3 signifie 5 x 5 x 5 qui est égal à 125

exposant

$\mathbf{5^3 = 125}$

base puissance

b) a^8 signifie $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$.

c) $(3b)^4$ signifie $3b \times 3b \times 3b \times 3b$

l'exposant 4 affecte toute la parenthèse.

d) $3b^4$ signifie $3 \times b \times b \times b \times b$

l'exposant 4 affecte le b seulement;

le 3 n'est pas affecté par l'exposant.

e) $(-2)^3 = -2 \times -2 \times -2$

l'exposant 3 affecte toute la parenthèse.

f) $-2^3 = -2 \times 2 \times 2$

l'exposant 3 affecte le 2 seulement;

le négatif n'est pas affecté par l'exposant.

g) $8^1 = 8$

Toute expression ayant un exposant de 1 demeure la même.

h) $8^0 = 1$

Toute expression ayant un exposant de 0 est égale à 1.

i) $(-3)^0 = 1$

j) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$

La ***multiplication*** de notation exponentielle s'obtient par l'***addition des exposants.***

Exemples :

a) $b^5 \times b^2 = b^{5+2} = b^7$

b) $5^4 \times 5^5 = 5^9$

c) $y^4 \times y^{-2} = y^{4+(-2)} = y^2$

d) $a^{-3} \times a^{-5} = a^{(-3)+(-5)} = a^{-8}$

La ***division*** de notation exponentielle s'obtient par la ***soustraction des exposants.***

Exemples :

a) $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$ a^5 divisé par a^2 égale a^3 parce que

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{(a)\,(a)\,(a)\,(a)\,(a)}{(a)\,(a)} = (a)\,(a)\,(a) = a^{1+1+1} = a^3$$

b) $\frac{12^5}{12^2} = 12^{5-2} = 12^3$

d) $\frac{9^4}{9^{-5}} = 9^{4-(-5)} = 9^{4+5} = 9^9$

Élever une puissance à une puissance

On obtient le résultat d'une puissance élevée à une puissance en ***multipliant les exposants.***

Exemples :

a) $(8^2)^3 = 8^{2 \times 3} = 8^6$

b) $(d^6)^{-4} = d^{6 \times (-4)} = d^{-24}$

c) $(3ab^3c^4)^2 = 3^2 \times a^{1 \times 2} \times b^{3 \times 2} \times c^{4 \times 2}$

$= 9 \times a^2 \times b^6 \times c^8$

$= 9a^2b^6c^8$

L'exposant affecte tous les coefficients à l'intérieur de la parenthèse.

LES MONÔMES

Un monôme est une expression algébrique ne contenant aucun signe d'addition ni de soustraction. Il est composé d'un nombre et d'une ou plusieurs lettres que l'on nomme variable ou inconnue. Un monôme est un terme.

Exemples :	$3xy$	$4ab$	$8xyz$

Un monôme ou un terme peut contenir une ou plusieurs lettres affectées d'un exposant.

Exemples :	y^2z	$9ab^3c$	$13xy^3z^4$

Une lettre affectée d'un exposant signifie que celle-ci est multipliée par elle-même le nombre de fois représenté par l'exposant.

C'est-à-dire que

$y^2z = yyz$ **y** est multiplié par lui-même deux fois.

$9ab^3c = 9abbbc$ **b** est multiplié par lui-même trois fois.

$13xy^3z^4 = 13xyyyzzzz$ **y** est multiplié par lui-même trois fois et **z** est multiplié par lui-même quatre fois.

Lorsqu'une expression contient des exposants, on dit qu'elle est exprimée sous la **forme exponentielle**.

b^3 est la forme exponentielle de $b \times b \times b$ (ou bbb)

Monômes semblables

Des monômes semblables sont des monômes composés des mêmes variables affectées du même exposant. Le coefficient numérique peut être différent.

Observation : L'ordre des lettres n'est pas important.

Exemple de deux monômes semblables : $12ab$ $8ab$

Exemple de trois monômes semblables : $7zy^2$

y^2z

$2zy^2$

Exemple de trois monômes semblables : $7ab^2c$

$-6b^2ac$

acb^2

EXERCICE 1

1. Identifiez le coefficient numérique.

a)	$8rs$	b)	$6ad$	c)	$15xy$
d)	$-xyz$	e)	$18c^2$	f)	m

2. Exprimez sous la forme exponentielle.

a)	$bbbb$	b)	$10mmnnn$	c)	$aabbcc$
d)	$6ccc$	e)	$8yy$	f)	$-6aaddd$

3. Identifiez les monômes semblables.

a) $-a^2$; $2a^2$; $-6b^2$; $4ab^2$; $-8a^2b$

b) $-6x^2yz$; $-5x^2y$; x^2yz ; $3x^2y^2z$; $-6x$

c) $4mn$; $8mm$; $15m^2n$; $15n^2m$; $3mn$

d) $9a^2b$; $5ad$; $7b^2$; $6ba^2$; $-4bc$

e) $-4ac$; $-abc^2$; $-4ab$; abc^2 ; $-4bc$

f) $2zy^2$; $2y^2z^2$; $3xy$; $3xy^2$; $3y^2z$

4. Identifiez le monôme qui est semblable à $-8m^2n^3op^5$.

a)	$7mn^2op^5$	b)	$6n^3om^2p^5$	c)	$2mon^3p^5$
d)	$-8mn^2op^5$	e)	$3n^2om^2p^5$	f)	$4m^2n^2op^5$

Calculer la somme et la différence de monômes semblables

L'addition de monômes semblables

1- On additionne les coefficients numériques.

2- On transcrit le coefficient littéral au total des coefficients numériques.

Exemples

A. $5xy + 4xy = 9xy$

$3a^2b^2 + a^2b^2 = 4a^2b^2$

On ne voit pas de coefficient numérique dans ce monôme, donc il est sous-entendu que le coefficient numérique est 1.

B. $5ab^2 + 10ab + 2ab^2 + 6ab$

1- On groupe les termes semblables.

$5ab^2 + 2ab^2$ $10ab + 6ab$

2- On additionne les termes semblables.

$7ab^2 + 16ab$

C. $3a^2b + ab + 4ab^2 + a^2b + 3ab + 2ab^2$

1- On groupe les termes semblables.

$3a^2b + a^2b + ab + 3ab + 4ab^2 + 2ab^2$

2- On additionne.

$4a^2b + 4ab + 6ab^2$

La soustraction de monômes semblables

1- On soustrait les coefficients numériques.

2- On transcrit le coefficient littéral.

Exemples

A. $4b - 2b = 2b$

B. $-3b - 4b = -7b$

C. $6zy - 3yz - (-yz)$

$= 6zy - 3yz + yz$

$= 3yz + yz$

$= 4yz$

D. $32m^2 - (-12m^2)$

$= 32m^2 + 12m^2$

$= 44m^2$

E. $18ab^2c - 5cab^2 + (-6ab^2c) - acb^2$

$= 18ab^2c - 5cab^2 - 6ab^2c - acb^2$

$= 6ab^2c$

F. $6xy - 3a^3 - yx - (-2a^3) - a^3$

$= 6xy - xy - 3a^3 + 2a^3 - a^3$

$= 5xy - 2a^3$

EXERCICE 2

1. Simplifiez en utilisant un coefficient numérique.

a)	$mo + mo + mo$	b)	$(-xy) + (-xy)$	c)	$am + am$
d)	$a + a + a + a$	e)	$d^2 + d^2 + d^2$	f)	$y + y$

2. Trouvez la somme.

a) $40a^3 + 20a^3 + 10a^3 + 10a^3 + 10b$

b) $45x + 30x^2 + 8x^3 + x^2 + 7x$

c) $12b^2 + 6b^3 + b + 4b^3 + 6b^2$

d) $15m^2 + 12m + m^2 + 8m + 10m$

e) $16d^4 + 3d^4 + 5d^3 + d^4 + 2d^3$

f) $8n^2 + n^2 + 10n^2 + 5 + 2$

3. Soustrayez le deuxième monôme du premier.

a)	$-45a^2$,	$-10a^2$	c)	$-18c$,	$18c$
b)	$50y^2$,	$-12y^2$	d)	$10b^3$,	$5b^2$
e)	$4c$,	$2a$	f)	$-26x$,	$-12x$

4. Effectuez les opérations.

   a) $4a^2 - 2b - a^2 + 5b$

   b) $8b^3 - 2c^2 - 3b^3 + 3c^2 + b^3$

   c) $5x^2y - 8xy^2 + 5xy^2 + 7x^2y - 9xy^2$

   d) $4a^2z - 9az^2 - 12az^2 - 20a^2z + 18az^2 + 3a^2z$

   e) $7x - 8y - 3x + 6y + 15y$

   f) $15 + 4x^2 + 8x + 5 + 9x^2 + 4x$

5. Trouvez la somme des monômes $8a^3b^4$, $-6a^3b^4$ et $8a^3b^4$.

6. Soustrayez $-35x^4y^3$ de $70x^4y^3$.

7. Soustrayez $-4a^3cd$ de $-19a^3cd$.

8. Additionnez $5 + 6p^4 + 15p^4 + p + 3$.

Calculer le produit de monômes

La multiplication de monômes

1- On multiplie les coefficients numériques.

2- On multiplie les coefficients littéraux. Notez que la multiplication des coefficients littéraux se fait en additionnant les exposants.

Rappel : Il y a quatre façons de désigner la multiplication :

1- par le signe de la multiplication $3 \times a$,

2- par des parenthèses (3) (a),

3- par un point $3 \cdot a$,

4- ou tout simplement en plaçant les deux coefficients côte à côte.

Exemples

A. $(2a^2)\ (3a^4) = (2)\ (a^2)\ (3)\ (a^4) = (2)\ (3)\ (a^2)\ (a^4)$

$(2)\ (3) = 6$ On multiplie les coefficients numériques.

$(a^2)\ (a^4) = (a \times a)\ (a \times a \times a \times a)$

$= a^{2+4} = a^6$ On additionne les exposants de la base **« a »**.

On a : $(2a^2)\ (3a^4) = 6a^6$

B. $(2xy)(4xy) = (2)(x)(y)(4)(x)(y) = (2)(4)(x)(x)(y)(y)$

$(2)(4) = 8$ On multiplie les coefficients numériques.

$(x)(x) = x^{1+1} = x^2$

$(y)(y) = y^{1+1} = y^2$ On additionne les exposants de la base **x** et de la base **y**.

On a : $(2xy)(4xy) = 8x^2y^2$

C. $(-3a)(-6a)(2a)$

$(-3)(-6)(2) = 36$ On multiplie les coefficients numériques.

$(a)(a)(a) = a^{1+1+1} = a^3$ On additionne les exposants de la base **« a »**.

On a : $(-3a)(-6a)(2a) = 36a^3$

D. $(2x^2)(2x^2)$

$(2)(2) = 4$ On multiplie les coefficients numériques.

$(x^2)(x^2) = x^{2+2} = x^4$ On multiplie les coefficients littéraux en additionnant les exposants de la base **« x ».**

On a : $(2x^2)(2x^2) = 4x^4$

E. $(x^3)\ (x^2)$

$= x^5$ On conserve la base et on additionne les exposants.

F. $(3yz^2)\ (5y^2z^4)$

$(3)\ (5) = 15$ On multiplie les coefficients.

$(y)\ (y^2) = y^3$ On additionne les exposants de la base « **y ».**

$(z^2)\ (z^4) = z^6$ On additionne les exposants de la base « **z ».**

On a : $(3yz^2)\ (5y^2z^4) = 15y^3z^6$

G. $(x^2)\ (-y^3)$ On n'additionne pas les exposants puisque leurs bases

$= -x^2y^3$ sont différentes.

H. $(a)\ (b^2)\ (d^2)\ (a)$ On additionne les exposants de la base « **a »** seulement.

$= a^2b^2d^2$

EXERCICE 3

1. Calculez.

a)	$(a)\ (a)\ (a)$	b)	$(y^2)\ (y)$	c)	$(-ab)\ (-2a^2b^2)$
d)	$(b^3)\ (b)$	e)	$(x^6)\ (x^3)$	f)	$(6xy)\ (5xy)$

2. Évaluez.

a)	$(b^2)\ (b^4)$	b)	$-6\ (2xy)$	c)	$-4\ (-3bc)$
d)	$(c^4)\ (c^2)\ (c)$	e)	$-6\ (-2y^2)$	f)	$m\ (3n)\ (3n)$

3. Multipliez les monômes suivants par 2.

a)	$32nop^2$	b)	$-60abc$	c)	$13cd^4$
d)	$28a^4b^5$	e)	$-100xyz^6$	f)	$4rs^2$

4. Multipliez les monômes suivants par $-x^2$.

a)	$4x^2y$	b)	$3x^4$	c)	x^4
d)	$-12xy^3$	e)	$10ab$	f)	$-3x^6$

5. Calculez le produit.

a) $(2ab^2)\ (-5a^3b^4)\ (-15a^4b)$

b) $(-6x^3yz)\ (5xyz^2)\ (-2x^2)$

c) $(-2abc)\ (3abc^2)\ (4a^2b)$

d) $(5xy)\ (2xy)\ (3xyz)$

e) $(x^2y)\ (-3y^3)$

f) $(3a^2b^5)\ (-2ab^7)$

g) $(2b^2)\ (-1)\ (b^3)\ (b^4)$

h) $(-6ab^2)\ (-4abc)\ (-2c)$

Calculer le quotient de deux monômes

La division d'un monôme par un autre monôme

1- On divise le coefficient numérique du dividende par le coefficient numérique du diviseur. Notez que dans 15ab ÷ 5a, 15ab est le dividende et 5a est le diviseur.

2 - On divise les coefficients littéraux en soustrayant l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende.

Exemples

A.

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{(\cancel{a})(\cancel{a})(a)(a)(a)}{(\cancel{a})(\cancel{a})} = (a)(a)(a) = a^{1+1+1} = a^3$$

ou

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$$

On divise des coefficients littéraux en soustrayant les exposants.

Rappel : On peut soustraire l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende à condition que la base des deux exposants soit la même.

B. $\frac{12ab}{3b} = 4a$

On peut aussi trouver le quotient en simplifiant la fraction.

$$\frac{{}^{4}\cancel{12}a\cancel{b}}{\cancel{3}\cancel{b}} = 4a$$

C. $\frac{a^5b^7}{ab^4}$

$\frac{a^5}{a} = a^{5-1} = a^4$ On soustrait l'exposant du diviseur (1) de l'exposant du dividende (5).

$\frac{b^7}{b^4} = b^{7-4} = b^3$ On soustrait l'exposant du diviseur (4) de l'exposant du dividende (7).

$= a^4b^3$

D. $(15x^8y^5z^2) \div (-5x^6y^2)$

$$\frac{15x^8y^5z^2}{-5x^6y^2} = \left(\frac{15}{-5}\right)\left(\frac{x^8}{x^6}\right)\left(\frac{y^5}{y^2}\right)\left(z^2\right)$$

$$= \left(-3\right)\left(x^{8-6}\right)\left(y^{5-2}\right)\left(z^2\right)$$

$$\frac{15x^8y^5z^2}{-5x^6y^2} = -3x^2y^3z^2$$

E. $\frac{a^3}{b^2}$ On ne peut pas diviser a^3 par b^2 puisque les bases sont différentes.

Cette expression ne change pas.

EXERCICE 4

1. Divisez.

a) $10n \div 2$	b) $-36ab \div (-12a)$	c) $-2abc \div (-bc)$
d) $12x \div 4$	e) $64xy \div (-y)$	f) $25x \div 5$

2. Évaluez.

a) $\frac{45pq}{-15q}$	b) $\frac{-42x}{-7}$	c) $\frac{48xy}{8y}$
d) $\frac{a^3}{-a}$	e) $\frac{-18ab}{-3b}$	f) $\frac{121x^2}{11x}$

3. Effectuez les divisions.

a) $-50b^3c^3 \div 5b^2c$

b) $-16x^3y^4 \div 2xy^2$

c) $32a^4b^2 \div (-4a^2b)$

d) $-30a^2b^2c^3 \div (-5bc)$

e) $55p^2q^2r \div (-pq^2r)$

f) $6ab^2 \div 6ab^2$

4. Évaluez.

a) $\frac{-16b^4}{-8b}$	b) $\frac{32x^5y^2z}{4xyz}$	c) $\frac{28x^5y^3z}{-7x^2y^3}$

d) $\dfrac{-39x^3y^3z^4}{13xyz}$ e) $\dfrac{24a^6b^5c^6}{24a^6b^5c^6}$ f) $\dfrac{a^4b^5}{ab^2}$

CORRIGÉ

Exercice 1

1.	a)	8	b)	6	c)	15
	d)	-1	e)	18	f)	1

2.	a)	b^4	b)	$10m^2n^3$	c)	$a^2b^2c^2$
	d)	$6c^3$	e)	$8y^2$	f)	$-6a^2d^3$

3.	a)	$-a^2$	et	$2a^2$
	b)	$-6x^2yz$	et	x^2yz
	c)	$4mn$	et	$3mn$
	d)	$9a^2b$	et	$6ba^2$
	e)	$-abc^2$	et	abc^2
	f)	$2zy^2$	et	$3y^2z$

4. Le monôme b) $6n^3om^2p^5$ est semblable à $-8m^2n^3op^5$

Exercice 2

1. a) $3mo$ | b) $-2xy$ | c) $2am$ | d) $4a$ | e) $3d^2$ | f) $2y$

1. a)	$3mo$	d)	$4a$
b)	$-2xy$	e)	$3d^2$
c)	$2am$	f)	$2y$

2.

a)	$80a^3 + 10b$	d)	$30m + 16m^2$
b)	$52x + 31x^2 + 8x^3$	e)	$7d^3 + 20d^4$
c)	$b + 18b^2 + 10b^3$	f)	$19n^2 + 7$

3.

a)	$-35a^2$	d)	$10b^3 - 5b^2$
b)	$62y^2$	e)	$4c - 2a$
c)	$-36c$	f)	$-14x$

4.

a)	$3a^2 + 3b$	d)	$-13a^2z - 3az^2$
b)	$6b^3 + c^2$	e)	$4x + 13y$
c)	$12x^2y - 12xy^2$	f)	$12x + 13x^2 + 20$

5. $10a^3b^4$

6. $70x^4y^3 - (-35x^4y^3) = 105x^4y^3$

7. $-19a^3cd - (-4a^3cd) = -15a^3cd$

8. $21p^4 + p + 8$

Exercice 3

1.	a)	a^3	b)	y^3	c)	$2a^3b^3$
	a)	b^4	e)	x^9	f)	$30x^2y^2$
2.	a)	b^6	b)	$-12xy$	c)	$12bc$
	d)	c^7	e)	$12y^2$	f)	$9mn^2$
3.	a)	$64nop^2$	b)	$-120abc$	c)	$26cd^4$
	d)	$56a^4b^5$	e)	$-200xyz^6$	f)	$8rs^2$
4.	a)	$-4x^4y$	b)	$-3x^6$	c)	$-x^6$
	d)	$12x^3y^3$	e)	$-10abx^2$	f)	$3x^8$
5.	a)	$150a^8b^7$	b)	$60x^6y^2z^3$	c)	$-24a^4b^3c^3$
	d)	$30x^3y^3z$	e)	$-3x^2y^4$	f)	$-6a^3b^{12}$
	g)	$-2b^9$	h)	$-48a^2b^3c^2$		

Exercice 4

1.	a)	$5n$	b)	$3b$	c)	$2a$
	d)	$3x$	e)	$-64x$	f)	$5x$
2.	a)	$-3p$	b)	$6x$	c)	$6x$
	d)	$-a^2$	e)	$6a$	f)	$11x$
3.	a)	$-10bc^2$	b)	$-8x^2y^2$		
	c)	$-8a^2b$	d)	$6a^2bc^2$		
	e)	$-55p$	f)	1		
4.	a)	$2b^3$	b)	$8x^4y$	c)	$-4x^3z$
	d)	$-3x^2y^2z^3$	e)	1	f)	a^3b^3